Тема: «Застосування інтеграла до обчислення площі плоских фігур»

Мета:

- навчальна – забезпечити закріплення умінь застосовувати інтеграл до обчислення площ плоских фігур;
- розвиваюча – розвивати пам'ять, увагу, логічне мислення;
- виховна – виховувати акуратність, інтерес до математики.

Завдання

1. Обчисліть (спочатку побудувавши рисунок) площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = 1 - \chi$, $y = 3 - 2x - x^2$;

б) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$;

в) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$, $y = 0$;

г) $y = 3x^2$, $y = 1{,}5x + 4{,}5$, $y = O$.

Відповідь: а) 4,5; б) 4,5; в) $6\frac{1}{6}$; г) 4.

2. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^3$, $y - 2x - x^2$, $y = 0$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = x$;

в) $y = \sqrt{-x}$, $y = 2 - x^2$, $x = 1$, $y = 0$; г) $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Відповідь: а) $\frac{11}{12}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $2\frac{2}{3}$ г) $\frac{5}{12}$.

3. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^2$; $y = 2x^2 - 1$ б) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$.

Відповідь: а) $\frac{4}{3}$; б) 9.

4. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$; б) $y = sinx$, $y = cosx$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Відповіді: а) 2; б) $2 - \sqrt{x}$.

Література: Шкіль М.І. та ін.. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Розділ IX §4.

Тема: «Застосування інтеграла до обчислення об’ємів тіл»

Мета:

- навчальна – засвоєння умінь застосовувати інтеграл об’ємів тіл;
- розвиваюча – розвивати пам'ять, увагу, логічне мислення;
- виховна – виховувати акуратність, інтерес до математики.
-

1. **Опрацюйте запропонований теоретичний матеріал.**

Поняття інтеграла може бути використано для виведення формули об'ємів тіл. Розглянемо практичний приклад. Припустимо, що нам потрібно обчислити об'єм лимона, який має неправильну форму, і тому використати яку-небудь відому формулу об'єму неможливо. Поступимо таким чином. Розріжемо лимон на тоненькі дольки. Кожну дольку приблизно можна вважати циліндром, радіус якого можна виміряти. Об'єм такого циліндра легко обчислити за готовою формулою. Склавши об'єми маленьких циліндрів, ми одержимо приблизно об'єм всього лимона. Наближення буде тим точніше, чим на більш тонкі частини ми зможемо розрізати лимон.

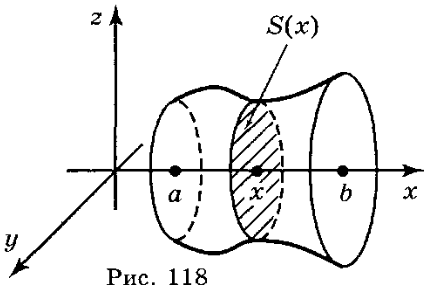


Рис. 118

Використаємо аналогічну процедуру для обчислення об'єму тіла.

На рисунку 118 зображено довільне тіло, об'єм якого потрібно обчислити. Припустимо, що дане тіло розташоване між паралельними площинами. Введемо систему координат так, щоб вісь абсцис була перпендикулярна цим площинам. Позначимо через *S(x)* площу перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі абсцис і яка перетинає її в точці *x*; функція *S(x)* неперервна на відрізку [a; *b*].

Розділимо відрізок [*a; b*] на *n* рівних відрізків: $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ і через точки перетину проведемо площини, перпендикулярні осі *OX.* Ці площини розріжуть дане тіло на *n* шарів.

Об'єм даного тіла приблизно дорівнює сумі об'ємів шарів з основами $S(x_0)$, $S(x_1)$, $S(x_2)$, …, $S(x_{n-1})$ і висотою $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$:

$$V = V_n = S(x_0)\cdot\Delta x + S(x_1)\cdot\Delta x + ... + S(x_{n-1})\cdot\Delta x = (S(x_0) + S(x_1) + ... + S(x_{n-1})\cdot\Delta x.$$

Точність цього наближення тим вища, чим більше *n*, тобто, тонші прошарки. Природно вважати, що об'єм даного тіла дорівнює границі об'єму V при $n \to \infty$: $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$. Сума V є інтегральною сумою для неперервної на відрізку [*a*; *b*] функції *S(x),* отже

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}\ .$$

Виведемо формулу об'єму тіла обертання. Нехай криволінійна трапеція обмежена відрізком [*a; b*] осі абсцис, графіком функції $y = f(x)$, невід'ємної і неперервної на відрізку [*a*; *b*], прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 119) обертається навколо осі *OX*. При обертанні цієї трапеції навколо осі абсцис утворюється тіло, об'єм якого можна обчислити за формулою

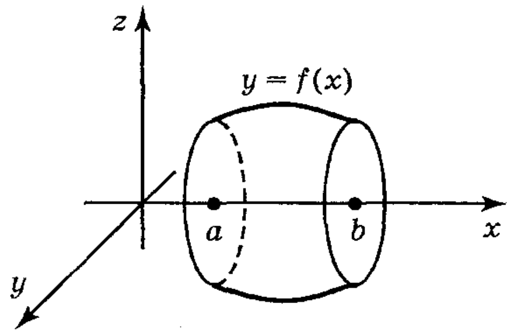


Рис. 119

$V = \int_a^b S(x)dx$. Але $S(x) = \pi y^2$ або $S(x) = \pi(f(x))^2$, отже,

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

2. **Запам'ятайте формулу для заходження об'єму тіл за допомогою інтеграла.**

3. **Виконайте вправи та перевірте правильність їх виконання.**

Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

а) $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$;

б) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$;

в) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

г) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 2$;

д) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$.

Відповіді: а) 24π; б) 2π; в) $13\frac{11}{15}\pi$; г) $17\frac{1}{7}\pi$; д) $0{,}5\pi^2$.

Література: Шкіль М.І. та ін.. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Розділ ІХ §4.

Тема: «Розв'язування показникових рівнянь і нерівностей»

Мета:

- навчальна – забезпечити узагальнення основних математичних знань про показникові рівняння і нерівності, закріплення вмінь розв'язувати показникові рівняння і нерівності;
- розвиваюча – формувати розумові вміння самостійно проводити міркування;
- виховна – сприяти формуванню сумлінного ставлення до праці.

Завдання

Розв'язати рівняння:

1. $\left(5^{x-6}\right)^{x-3} = \frac{1}{25}$**;**
2. $2^{2x+1} + 3 \cdot 2^x - 2 = 0$;
3. $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$;
4. $5^{x+2} + 5^x = 130$;
5. $3^{x+3} + 3^x = 84$;
6. $6^{x+2} - 4 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 6^x = 120$;
7. $64^x - 7 \cdot 8^x - 8 = 0$;
8. $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$;
9. $3^x + 3^{2-x} = 10$.
10. $\left|3^x - 1\right| + \left|3^x - 9\right| = 8$.

Розв'язати нерівності:

1. $5^x \le 25$;
2. $0,3^{x-2} \ge 0,09$;
3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-3x} \ge 5$;
4. $2^{x+2} + 2^{x+5} < 9$;
5. $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x \le 4$.
6. $5 < 5^{1-x} < 125$.
7. $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > \sqrt{\left(\frac{27}{125}\right)^x}$.
8. $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \le 8 \cdot 15^x$.
9. $\left(2^x - 2\right)\sqrt{x^2 - x - 6} \ge 0$.

Література: Шкіль М.І. та ін.. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Розділ IV §2.

Тема: «Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей»

Мета:

- навчальна – забезпечити узагальнення основних математичних знань про логарифмічні рівняння і нерівності, закріплення вмінь розв'язувати логарифмічні рівняння і нерівності;
- розвиваюча – формувати розумові вміння самостійно проводити міркування;
- виховна – сприяти формуванню сумлінного ставлення до праці.

Завдання

Розв'язати рівняння

1) $9^x = 5$; **2)** $\log_4 (5x + 1) = 2$;

3) $\log_{0,3} (13 - x) = \log_{0,3} (x + 3)$;

4) $\lg (x - 3) + \lg (x + 6) = \lg 2 + \lg 5$;

5) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$;

6) $\log_2 (3x - 1) + \log_2 (x - 1) = 1 + \log_2 (x + 5)$;

7) $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$;

8) $\lg \lg \lg x = 0$;

9) $\log_x 10 + \lg x = 2$;

10) $\log_3 x \log_9 x \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$.

Розв'язати нерівності

1) $\log_6 x > 2$; **2)** $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;

2) $\log_3 (2x - 1) < 3$; **3)** $\lg 2x < 2\lg 7 + 1$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 3x\right) \geq -2$; **5)** $\lg(2x + 3) < \lg(x - 1)$;

6) $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 < 0$; **7)** $\log_x (x + 3) > 0$;

8) $\log_{0,7} (x^2 - 2x - 3) \geq \log_{0,8} (9 - x)$;

9) $\log_{2x+3} x^2 < 1$; **10)** $x^{\lg x} < 1000x^2$.

Література: Шкіль М.І. та ін.. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Розділ V §3.

Тема: «Розв'язування тригонометричних нерівностей»

Мета:

- навчальна – забезпечити поглиблення основних математичних знань про тригонометричні нерівності, закріплення вмінь розв'язувати тригонометричні нерівності;
- розвиваюча – формувати розумові вміння самостійно проводити міркування;
- виховна – сприяти формуванню сумлінного ставлення до праці.

Завдання

Середній рівень

Розв'язати нерівність:

1. **1)** $\cos x < \frac{1}{2}$; **2)** $\text{ctg}\, x > -1$.

2. $\sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $3\text{tg}\, x + \sqrt{3} \geq 0$.

Достатній рівень

Розв'язати нерівність:

1. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\geq 1$. **2.** $2\cos^2\frac{x}{2} - 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} < \sqrt{2}$.

Високий рівень

Розв'язати нерівність:

1. $2\cos^2 x - 3\sin x - 3 < 0$. **2.** $\cos x + \cos 3x + \cos 2x < 0$.

3. $\text{ctg}^2 x < 3$.

Література: Шкіль М.І. та ін.. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Розділ II §5.

Тема: «Застосування формул тригонометрії до спрощення виразів»

Мета:

- навчальна – забезпечити повторення тригонометричних формул, оволодіння математичними вміннями і навичками тотожних перетворень тригонометричних виразів;
- розвиваюча – формувати розумові вміння самостійно проводити міркування;
- виховна – сприяти формуванню сумлінного ставлення до праці.

Завдання

Середній рівень

Спростити вираз (1 — 2):

1. **1)** $14 + \cos^2 14° + \sin^2 14°$; **2)** $\cos^2 14° - \sin^2 14°$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 47° - \operatorname{tg} 2°}{1 + \operatorname{tg} 47° \operatorname{tg} 2°} + 1$; **4)** $\cos 50° - \cos 40°$.

2. **1)** $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha \cos\beta$; **2)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$.

Достатній рівень

Довести тотожність (2 — 3):

2. $\frac{1 - \operatorname{ctg}(\pi + \alpha)}{1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

3. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta \sin\alpha}$.

Високий рівень

1) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Обчислити ctg $(\alpha + \beta)$.

2) Довести, що $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Довести тотожність:

1. $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 2{,}5\alpha$.

2. Довести, що $\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3)$.

Література: Шкіль М.І. та ін.. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Розділ I §§8, 9, 10.

Тема: «Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків»

Мета:

- навчальна – забезпечити відпрацювання навичок дослідженням функції та побудови графіків;
- розвиваюча – розвивати культуру математичних записів, вміння аналізувати, застосовувати отримані знання для розв'язання завдань;
- виховна – виховувати акуратність, наполегливість.

Картка-інструкція.

Дослідження функції за допомогою похідної.

Завдання1. Дослідити функцію $y = x^4 - 2x^2$ за допомогою похідної.

Інструкція по виконанню завдання

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну функції.
3. Знайти критичні точки функції.
4. На числовій прямій відмітьте критичні точки функції.
5. Визначити знак значень похідної на кожному з отриманих проміжків числової прямої.
6. Зробити висновок про проміжки зростання і спадання функції.
7. Вияснити, чи змінюється знак похідної при переході через знайдені критичні точки.
8. Зробити висновок про наявність точок мінімуму або максимуму.

Варіант розв'язку:

1.Права частина формули, що задає функцію- многочлен. Значить, областю визначення функції будуть всі дісні числа, тобто $D(y) = (-\infty;\infty)$.

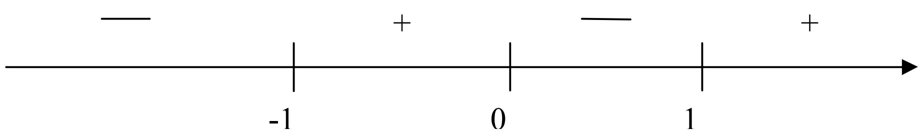
2.Похідна функції має вид: $y' = 4x^3 - 4x$.

3.Знайдемо критичні точки функції. Для цього визначимо, при яких значеннях x із області визначення похідна дорівнює нулю або не існує.

а) $y' = 0$, якщо $4x^3 - 4x = 0$. Маємо $x = 0$, або $x = 1$,або $x = -1$;

б) $y' = 4x^3 - 4x$ визначена на всій області визначення.

4.На числовій прямій позначимо критичні точки:



5. Визначимо знаки значень похідної на кожному з чотирьох проміжків. Для цього на кожному проміжку виберемо довільне значення аргументу і визначимо знак значення похідної.

а) $-2 \in (-;-1)$, $y'(-2) = 4\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2) = -32+8<0$;

б) $-0{,}5 \in (-1;0)$, $y'(-0{,}5) = 4\cdot(-0{,}5)^3 - 4\cdot(-0{,}5) = 4\cdot(-0{,}125)+2>0$;

в) $0{,}5 \in (0;1)$, $y'(0{,}5) = 4\cdot 0{,}5^3 - 4\cdot 0{,}5 = 4\cdot 0{,}125 - 2<0$;

г) $2 \in (1;\infty)$, $y'(2) = 4\cdot 2^3 - 4\cdot 2 = 32 - 8 > 0$.

6. На основі ознаки зростання (спадання) функції маємо: функція зростає на проміжках $(-1;0)$ і $(1;\infty)$, а спадає на проміжках $(-\infty;-1)$ і $(0;1)$.

7. Переходячи через точку - 1 , похідна змінює свій знак з «–» на «+», значить $x_0 = -1$ точка мінімуму.

8. Аналогічно робимо висновок про те, що $x_0 = 0$ точка максимуму, а $x_0 = 1$ точка мінімуму.

Завдання

Дослідити функцію і побудувати її графік : $f(x) = \dfrac{x^3 - 3Nx^2}{N^3}$.

(Замість N записати порядковий номер у журналі успішності).

Література: Шкіль М.І. та ін.. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Розділ VIII § 5.

Тема: «Диференціальні рівняння. Рівняння розмноження бактерій»

Мета:

- навчальна – формувати загально навчальні вміння і навички працювати з навчальною літературою;
- розвиваюча – формувати розумові вміння самостійно проводити міркування;
- виховна – сприяти формуванню сумлінного ставлення до праці.

Завдання

1. Опрацювати теоретичний матеріал підручника:
   - Самостійно визначити мету читання;
   - Розібратися у змісті прочитаного;
   - Виділити головне у тексті;
   - Систематизувати прочитане у вигляді опорних схем.
2. Розглянути приклад 1 (розмноження бактерій).
3. Відповісти на питання:
   - Що таке швидкість розмноження бактерій?
   - Якій величині пропорційна швидкість розмноження бактерій?
   - Яка рівність пов'язує швидкість розмноження бактерій і їх кількість?
   - Яка функція задовольняє цю рівність?
   - Як можна знайти мвсу бактерій у будь-який момент часу?
4. Зробити висновок.
5. Виконати завдання № 9(1), № 11 [1].

Література:

[1] Шкіль М.І. та ін.. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Розділ X § 6.